

FOKUS MATEMATIK

De komplekse genier

Er det overhovedet muligt at løse en ligning, som ikke har nogen reelle løsninger, såsom $x^2+1=0$?

Svaret er, at der findes to løsninger, men hvad er de? Løsningen på ligningen ligger i de komplekse tal. Disse tal er mange steder i vores dagligdag, men de fleste mennesker kender oftest ikke til eksistensen af de komplekse tal. De komplekse tal har operationer, som ingen andre talsæt har, og de er en udvidelse af de reelle tal. Med udvidelse menes der, at de består af en reel del, og en imaginær del. De tre matematiske genier, som havde stor betydning bag de komplekse tal, var Caspar Wessel, Augustin Cauchy og Bernhard Riemann.

Men hvem var disse tre genier, og hvordan havde de en stor betydning for de komplekse tal?

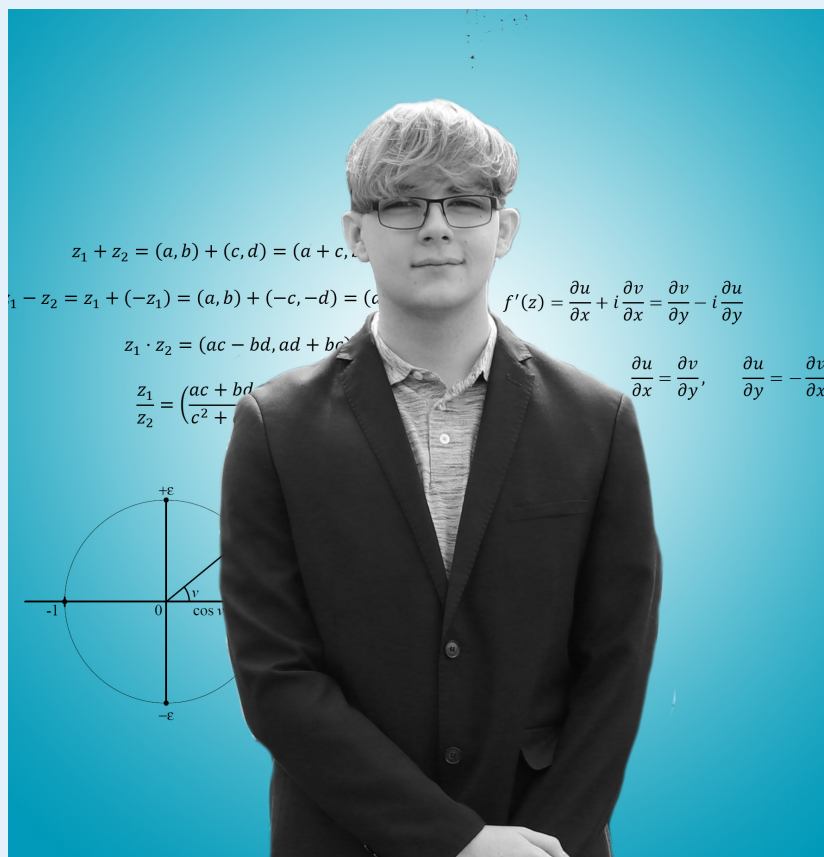
MATEMATIK

Komplekse tal?

SKREVET AF

ANDREAS C. UHRENHOLT

→ Før vi går i dybden med, hvem de tre komplekse genier var, skal vi først tage et kig på komplekse tal. Der er forskellige måder at repræsentere de komplekse tal på. Generelt kan de siges at være mængden af de ordnede reelle talpar, men oftest er de komplekse tal defineret på deres rektangulære form, som er $z=a+bi$. Tallene a og b er begge reelle tal, og $i=\sqrt{-1}$ er den imaginære enhed. De komplekse tal fremtræder mange gange i dagligdagen, og de er over alt i den moderne matematik, hvor de benyttes sammen med funktioner, og derfor er de yderst vigtige i det moderne samfund. Et af de mest overbevisende eksempler på den praktiske anvendelse af de komplekse tal, i matematikken og den virkelige verden, findes i vekselstrømsteorien, hvor funktioner og komplekse tal bliver brugt som design og analyse af elektroniske kredsløb. De komplekse tal er meget ens med de reelle tal, men de har nogle forskellige egenskaber.



Et eksempel kunne være differentiability, hvor regnereglerne egentlig er de samme for både komplekse og reelle funktioner, men de reelle funktioners grænse kun har to retninger hvorfra x nærmer sig x_0 . De komplekse funktioner er lidt anderledes. De komplekse funktioners grænse eksisterer uafhængigt af den retning, hvorfra at z nærmer sig z_0 , hvilket vil sige at de ikke er afhængige af den todimensionale plan.

For de komplekse funktioner er der nogle berømte ligninger, som beskriver, hvornår en funktion er differentiable, nemlig Cauchy-Riemann ligningerne. Disse ligninger siger noget om, at hvis man differentierer en kompleks funktion, så kan man dele den op i to mindre funktioner, en reel og en imaginær, som oftest betegnes som følgende:

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Når man bruger ligningerne, siger man, at hvis du differentierer $u(x,y)$ med hensyn til y , $\partial u/\partial y$, så skal det være det samme som at differentierer $-v(x,y)$ med hensyn til x , hvilket vil sige, at $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$. Der er mere til Cauchy-Riemann ligningerne og de komplekse tal, hvilket man kan vælge at læse mere om i "læs mere online" boksen. De tre komplekse genier, Caspar Wessel, Augustin Cauchy og Bernhard Riemann, er nogle af de mest bemærkelsesværdige matematikere inden for de komplekse tal, men hvem var de egentlig?

Caspar Wessel

Caspar Wessel var en dansk-norsk matematiker og landmåler, som blev født i år 1745 i Jønsrud i Norge, der på dette tidspunkt var underlagt det dansk-norske riges enevældige styre. Han havde en meget



Caspar Wessel

Augustin
Cauchy

Bernhard
Riemanns

normal barndom, og var søn af en præst. Efter Wessel i år 1763 havde afsluttet realskolen i Oslo, tog han til Danmark for at studere videre på sin uddannelse. Caspar Wessel gik på Københavns universitet, og han studerede jura. Dog på grund af et økonomisk pres blev han nødt til at droppe studiet efter et år, og for hans overlevelsels skyld blev han landinspektør for sin egen bror. Dog var det ikke nok indtjening, og han tog derfor endnu et arbejde, og han blev derfor også kartograf. Igennem resten af Caspar Wessels liv arbejdede han som landmåler, og han døde i år 1818. I år 1799 var Caspar Wessel verdens første person, som beskrev den geometriske interpretation af komplekse tal som punkter i den komplekse plan og som vektorer. Det var det matematiske

aspekt af landopmålingen, der gjorde at Caspar Wessel begyndte at udforske de komplekse tals geometriske betydning. Hans opdagelse blev sendt til det danske videnskabelige akademi, og blev udgivet som et tidsskrift. Dog blev det sjældent læst, idet det stod på dansk. Det var først senere hen, at hans arbejde blev opdaget, og hans værk blev revolutionært for matematikken.

Læs
mere
online

www.sundvision.dk/srp

Bernhard Riemann

Bernhard Riemann var en tysk matematiker, som blev født den 17. september i 1826 i en fattig familie. Igennem Riemanns liv var han en tildels genert og faktisk også introvert, men dog havde han en pragtfuld gave, hans hjerne. Riemann var et matematisk geni, og på hans skole var der en skolelærer, som lagde mærke til Riemanns matematiske talent. Skolelæren begyndte at udlåne Riemann avancerede matematiske bøger. En af de første bøger, som Riemann blev tildelt, var "Number Theory", som var skrevet af matematikeren Adrien-Marie Legendre. Efter en uge kendte Riemann allerede bogen udenad, og dette var starten på det matematiske geni.

Han blev professor inden for mate-

Casper Wessel banebryende artikel om komplekse tal fra 1799 blev glemt i næsten 200 år, selvom den blev udgivet i samlingen af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter.

Han blev professor inden for matematik i år 1859, og for første gang i sit liv, blev han økonomisk stabil. Desværre blev Riemann meget syg i år 1862, han var havde fået tuberkulose og i år 1866 endte det med at koste ham livet i Italien. Riemann lavede mange banebrydende matematiske opdagelser gennem sit liv. Han var endda den matematiker, der skabte det matematiske grundlag for Albert Einsteins relativitetsteori. Men udover det introducerede Riemann, i år 1851, en metode, hvor polynomialligningerne i to reelle variable kunne laves til polynomialligninger med to komplekse variable. Han udtænkte, at en polynomialligning definerer en kurve i et plan, og da en kompleks variabel z kan opfattes som det reelle talpar $x+yi$, så må en kompleks ligning af to komplekse variable også udgøre en reel overflade, som er spredt over et plan. Senere hen i år 1859 introducerede Riemann kompleks-funktions teori i talteori, og det var her at han var en af de første til at studere differentialligninger som involverede komplekse variable.

Augustin Cauchy

Augustin Cauchy blev født i år 1789 i Paris. Han var en fransk matematiker, som siges at have været en af de bedste moderne matematikere nogensinde. I år 1793-1794, under den franske revolution, flygtede Cauchy og hans familie fra Paris. De flygtede hele vejen til landsbyen Arcueil, og det var i denne by at en ny matematiker blev født. Da Cauchy kom til Arcueil stiftede han bekendtskab med matematikeren Pierre-Simon Laplace, og kemikeren Claude-Louis Berthollet. De gav ham en stor interesse for matematik. Senere i Cauchys liv, i år 1810, blev han ingeniør, hvor han blev sendt til Cherbourg for at arbejde på forskellige havne og befæstninger til Napoleons engelske invasionsflåde. Dog på samme tidspunkt begyndte han at kigge på nogle matematiske problemer, som han også fandt løsningen til. I år 1813 kom Augustin Cauchy tilbage til Paris, og det var her at han for alvor gik i dybden med matematikken. Det samme år blev der publiceret en artikel af Cauchy, hvor han beskrev bestemte integraler. Denne beskrivelse han lavede gik derefter hen og blev hele grundlaget for teorien bag de komplekse funktioner. I dag er hans udvikling af kompleks funktionsteori uundværligt for matematikken og fysikken.

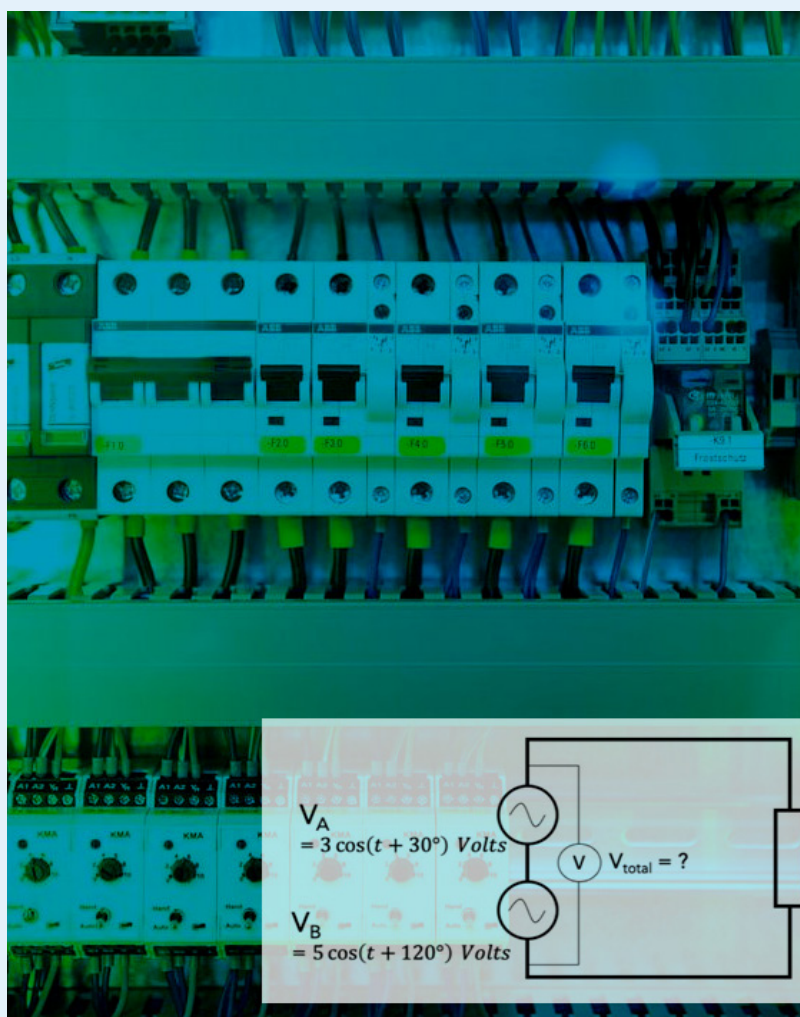
Cauchy-Riemann ligningerne

Ligningerne var et projekt, som undersøgte nogle differentialligninger, og de funktioner,

som opfyldte disse specielle differentialligninger, samt funktionernes egenskaber. Disse par af differentialligninger blev for første gang undersøgt i år 1752 af matematikerne Jean-Baptiste og Leonhard Euler. Deres arbejde blev senere hen samlet op af matematikeren Augustin Cauchy i år 1814. Han begyndte at diskutere ligningerne og deres forbindelse med evalueringen af uegentlige integraler. Dog havde ingen af de tre matematikere kigget på det forhold, som differentialligningerne havde til den geometriske fortolkning af komplekse tal i den komplekse plan. Det var her, at Bernhard Riemann kom ind i billedet. Han samlede Augustin Cauchys arbejde op, og her bragte Riemann hele geometrien af den komplekse plan ind i hans diskussion omkring differentialligningerne og differentiable komplekse funktioner, og beviste sammenhængen mellem differentialligningerne og kompleks differentiability. Differentialligningerne blev herefter navngivet Cauchy-Riemann ligningerne efter Cauchy og Riemanns indflydelsesrige arbejde.

BETYDNINGEN AF DE KOMPLEKSE TALS OPDAGELSER

Komplekse tal bruges i beregninger af strøm, spænding eller modstand i kredsløb



Deres betydning for arbejdet, og de komplekse tal i nutidens verden

De tre komplekse genier, Caspar Wessel, Augustin Cauchy og Bernhard Riemann, havde en stor betydning for de komplekse tal. Først og fremmest, var Caspar Wessel grunden til, at man kunne lade en ny talmængde blive introduceret i matematikken. Hvis Caspar Wessel ikke havde fundet de geometriske og algebraiske sammenhæng for de komplekse tal, ville man til den dag i dag ikke kunne acceptere, at de blev en del af matematikkens talmængder. Caspar Wessel gjorde det muligt for matematikere at udforske de komplekse tal til det maksimale. Vi har derfor set en stor udvikling blandt de komplekse tal siden Caspar Wessels store fund til nu. Bernhard Riemann og Augustin Cauchys arbejde med de komplekse tal gjorde det muligt at fortolke de komplekse funktioner med komplekse variable, og det gjorde det muligt at lave kompleks analyse, hvor de var med til at bevise, at de komplekse funktioner er helt specielle, og deres differentiability er anderledes i forhold til de reelle funktioner. På grund af deres udviklinger inden for komplekse tal i matematikken, har nutidens matematikere viderebygget på emnet. Vi bruger i dag de komplekse tal til utroligt mange ting. De har været med til at danne forståelsen af de elektriske kredsløbs opførsel, samt hvordan de forskellige elektromagnetiske bølger bevæger sig gennem rum og luft, hvilket blandt andet gør det muligt for os mennesker at snakke i telefon og lytte til radioen. Der er mange flere eksempler på, hvad de komplekse tal fremkommer i, og på grund af Caspar Wessel, Augustin Cauchy og Bernhard Riemann, er det derfor blevet muligt at løse mange komplekse problemer, som kan findes i hverdagen.

Næste artikel start